Szőkefalvi-Nagy Gyula Matematika Emlékverseny LIX. esztendő

2022-2023. tanév

I. forduló
Megoldások

9. évfolyam

1. Mely egész *n* esetén lesz az alábbi két kifejezés mindegyike egyszerre egész?

$$\frac{5n+7}{n+1} \text{ és } \frac{n^2+1}{n+2}$$

Megoldás

$\frac{5n+7}{n+1} = \frac{5(n+1)+2}{n+1} = 5 + \frac{2}{n+1}$ ahonnan *n* értéke a következő lehet: -3; -2; 0; 1.

1. megoldás

Ezeket $\frac{n^2+1}{n+2}$- be helyettesítve kapjuk, hogy a feladat feltételének csak -3 tesz eleget.

2. megoldás

$\frac{n^2+1}{n+2} = \frac{n^2-4+5}{n+2} = \frac{(n-2)(n+2)+5}{n+2} = n - 2 + \frac{5}{n+2}$ ahonnan *n* értéke a következő lehet: -7; -3, -1; 3.

azaz mindkét kifejezés értéke n = -3 esetén lesz egész.

2. Van-e olyan *n* egész szám, amelyre 2022 + *n* és 2022 – *n* is négyzetszám?

Megoldás

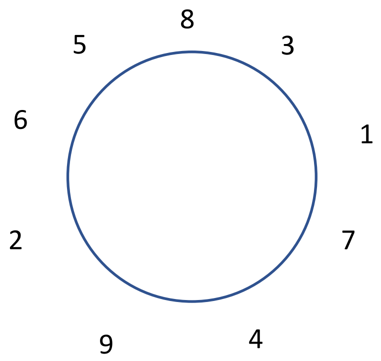
Nem létezik. Tételezzük, fel, hogy létezik ilyen *n*. Ekkor a két négyzetszám összege 4044 (hiszen 2022 + n = a^2 és 2022 – n = b^2. E két egyenletet összeadva kapjuk, hogy 4044 = a^2 + b^2.) Egy négyzetszám 3-mal osztva 0-t vagy 1-et ad maradékul. Mivel 4044 osztható 3-mal így a^2 és b^2 3-as maradéka is 0. Ekkor viszont mindkettőnek oszthatónak kell lennie 9-cel is, ami nem lehet, hiszen 4044 nem osztható 9-cel.

3. Fel lehet-e írni az 1, 2, ..., 9 számokat egy kör kerületére olyan sorrendben, hogy bármelyik két szomszédos szám összege ne legyen osztható sem 3-mal, sem 5-tel, sem 7-tel?

Megoldás

Írjuk fel az 1-9-ig terjedő számoknak azokat a szomszédjait, amelyek a kért feltételt kielégítik.

1 szomszédja lehet 3,7,
2 szomszédja lehet 6,9,
3 szomszédja lehet 1,5,8,
4 szomszédja lehet 7,9,
5 szomszédja lehet 3,6,8,
6 szomszédja lehet 2,5,7,
7 szomszédja lehet 1,4,6,9,
8 szomszédja lehet 3,5,9,
9 szomszédja lehet 2,4,7,8.



Fel lehet írni, amire adunk egy példát.

4. Az Éjjeli Őrség 2022 főből álló csapatának tagjai hármasával állnak őrséget a Fekete Várban. Készíthet-e a parancsnokuk olyan beosztást, hogy a csapatból bármely két ember pontosan egyszer legyen együtt őrségben?

Megoldás

Tegyük föl, hogy készítettünk egy ilyen beosztást. Tekintsünk egy tetszőleges embert, X-et a 2022-ből. Vizsgáljuk azokat a hármasokat, amelyekben X szerepel. Ezekből X-et elhagyva olyan párokat kapunk, amelyekben X-en kívül mindenki pontosan egyszer szerepel, hiszen ha ez nem lenne így, akkor lenne valaki, aki nem pontosan egyszer őrködik együtt X-szel. Azonban X-en kívül 2021 tagja van a csapatnak, tehát őket nem lehet a leírt módon párokba sorolni. Tehát a kívánt beosztást nem lehet elkészíteni.

5. Egy háromszög oldalainak mérőszámai a, b és c pozitív egész számok, amelyekre teljesül, hogy

$$abc+ab+9c+5=3a+3b+3ac+3bc$$

Igaz-e, hogy a háromszög egyenlőszárú?

<u>Megoldás</u>

Emeljünk ki a-t, majd alakítsunk szorzattá:

$$a(bc+b-3c-3)-3bc-3b+9c+5=0$$

$$a(bc+b-3c-3)-3(bc+b-3c-3)=4$$

$$(a-3)(bc+b-3c-3)=4$$

$$(a-3)(b-3)(c+1)=4$$

Pozitív egész számok körében $a-3>-3$; $b-3>-3$ és $c+1>1$.

Ez esetben a bal oldalon álló 4-et az alábbi táblázat szerint bonthatjuk három egész tényező szorzatára:

$a-3$	$b-3$	$c+1$	a	b	c
-1	-1	4	2	2	3
1	1	4	4	4	3
1	2	2	4	5	1
2	1	2	5	4	1
-1	-2	2	2	1	1
-2	-1	2	1	2	1

Az utolsó négy esetben a, b és c nem tesz eleget a háromszög egyenlőtlenségnek.

Tehát a háromszög oldalainak hossza 2, 2 és 3 vagy 4, 4 és 3 egység lehet, vagyis a háromszög egyenlőszárú.

6. Határozzuk meg az összes olyan háromjegyű n számot, amely számjegyeinek összege háromszor akkora, mint $n + 11$ számjegyeinek összege.

Megoldás

Jelölje s az n háromjegyű szám számjegyeinek összegét, így s pozitív egész.

11 hozzáadásával egy háromjegyű szám számjegyeinek összege aszerint változik, hogy hány tízes átlépés van.

átlépesek száma	0 (pl. 325 $\Rightarrow$ 336)	1 (pl. 249 $\Rightarrow$ 260)	2 (pl. 189 $\Rightarrow$ 200)	3 (pl. 989 $\Rightarrow$ 1000)
Az n + 11 számjegyeinek összege	$s + 2$	$s – 7$	$s – 16$	$s – 25$

A feladat feltételeiből az alábbi egyenleteket kapjuk:

$s = 3(s + 2)$ ahonnan $s = -3$, ami nem lehet.

$s = 3(s – 7)$, ahonnan $s = 10,5$, ami nem lehet.

$s = 3(s – 16)$, ahonnan $s = 24$.

$s = 3(s – 25)$, ahonnan $s = 37,5$, ami nem lehet.

Vagyis n olyan háromjegyű szám, amely számjegyeinek összege 24 és 11 hozzáadásakor az összeadás két tízes átlépést tartalmaz.

Az olyan háromjegyű számban, ahol a számjegyek összege 24, a lehetséges számjegyek:

9, 9, 6, amelyekből a képezhető számok: 996, 969, 699.

9, 8, 7, amelyekből a képezhető számok: 987, 978, 879, 897, 789, 798.

8, 8, 8, amelyekből a képezhető szám: 888.

A lehetséges számokhoz 11-et adva két átlépést a 996, 699 és a 789-nél kapunk, amelyek valóban megoldásai a feladatnak.

10. évfolyam

1. Egy londoni klubba egymás után érkeznek a vendégek, de nem fog mindenki kezet mindenkivel. Megfigyelték, hogy az első és az utolsó ember kivételével mindenki ugyanannyi emberrel fogott kezet a bent lévők közül, mint az utána érkezők közül. Bizonyítsuk be, hogy az első és az utolsó érkező ugyanannyi emberrel fogott kezet.

Megoldás

Kérjük meg a klubban lévő vendégeket, hogy mindenki adjon az előtte érkezők közül azoknak 1 fontot, akikkel kezet fogtak.

Az első és az utolsó vendég kivételével mindenki annyi fontot ad, mint amennyit kap. A kézfogások kölcsönössége miatt a társaság összvagyonát ez az adakozás változatlanul hagyja. Így az utolsó vendég annyiszor lesz szegényebb 1 fonttal, ahány emberrel kezet fogott, az első pedig ugyanannyi fonttal lesz gazdagabb.

Evvel az állítást bizonyítottuk.

2. Az *ABC* derékszögű háromszög *AB* átfogóján felvett *P* pont merőleges vetülete az *AC* és *BC* befogóra rendre *X*, illetve Y. Az *AY*, *BX* egyenesek metszéspontja *K*. Bizonyítsuk be, hogy *ABK* háromszög területe egyenlő a *CXKY* négyszög területével!

Megoldás

Elég belátni, hogy *ABX* háromszög és *AYC* háromszög területe egyenlő. (A kívánt területek ezekből úgy kaphatók, hogy mindkettőből kivonjuk a *KXA* háromszög területét.)

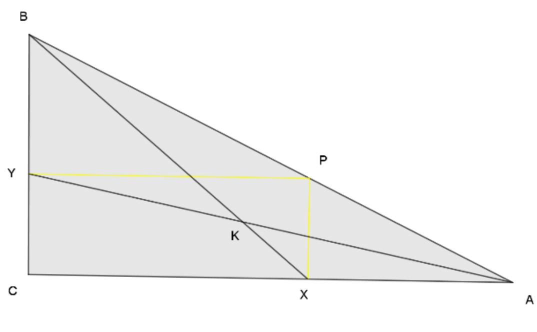
$T_{ABX_\Delta} = \frac{AX \cdot BC}{2}$, valamint $T_{ACY_\Delta} = \frac{AC \cdot CY}{2}$

CAB szögre felírva a párhuzamos szelőszakaszok tételét:

$\frac{AX}{AC} = \frac{PX}{BC} \Rightarrow AX \cdot BC = AC \cdot PX$

Mivel $PX=CY \Rightarrow AX \cdot BC = AC \cdot CY$.

Evvel bebizonyítottuk, hogy a két terület egyenlő.



3. Mely p és q valós paraméterek mellett lesznek az $x^2 + (2 - p^2)x + 4q + 5 = 0$ egyenlet valós megoldásai 3-mal nagyobbak az $x^2 - 2px + 2q - 8 = 0$ egyenlet valós megoldásainál?

Megoldás

Jelölje x_1 és x_2 az első egyenlet két megoldását. Ekkor a második egyenlet két megoldása:

$x_1 - 3$ és $x_2 - 3$.

A Viète-formulából:

$x_1 + x_2 = -2 + p^2$

$x_1 - 3 + x_2 - 3 = 2p$

A két egyenletet egymásból kivonva rendezés után a következő egyenletet kapjuk:

$p^2 - 2p - 8 = 0$

ahonnan $p = 4$ vagy $p = -2$.

A másik Viète-formulából:

$x_1 \cdot x_2 = 4q + 5$

$(x_1 - 3) \cdot (x_2 - 3) = 2q - 8$

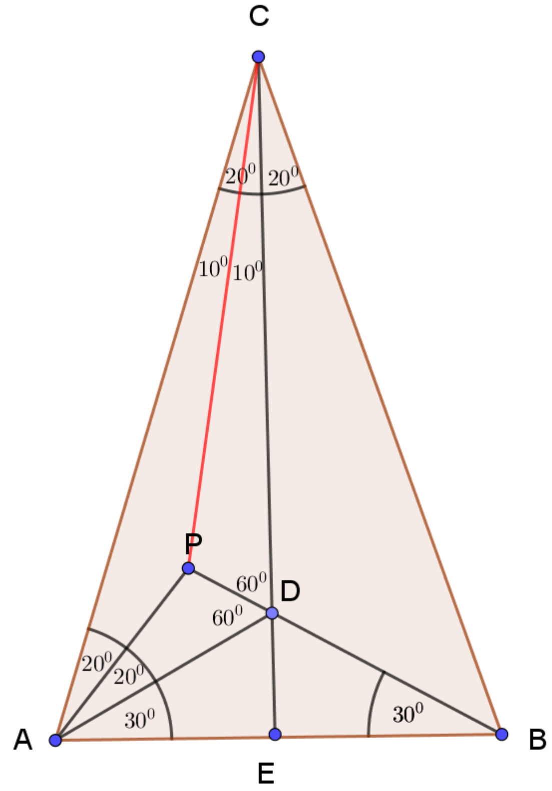
Utóbbit átalakítva kapjuk, hogy $x_1 \cdot x_2 - 3(x_1 + x_2) + 9 = 2q - 8$

Ha $p = 4$ (azaz $x_1 + x_2 = -2 + p^2 = 14$), akkor $4q + 5 - 3 \cdot 14 + 9 = 2q - 8$, ahonnan $q = 10$.

Ha $p = -2$ (azaz $x_1 + x_2 = -2 + p^2 = 2$), akkor $4q + 5 - 3 \cdot 2 + 9 = 2q - 8$, ahonnan $q = -8$.

A $p = 4$, $q = 10$ és a $p = -2$ és $q = -8$ valóban a feladat feltételeinek megfelelő egyenleteket ad.

4. Az *ABC* egyenlőszárú háromszögben *AC*=*BC* és a *C* csúcsnál lévő szög 40^0. A háromszög egy belső *P* pontjára igaz, hogy $PAB\angle = 50^0$, valamint $PBA\angle = 30^0$. Hány fokos a BPC szög?



__Megoldás__

A háromszög *CE* szimmetriatengelye *PB* szakaszt *D*-ben metszi. A feladat feltételeinek megfelelően számoljuk az *ADC* háromszög *A* és *D* csúcsánál levő szögeit.

Mivel *D* illeszkedik *AB* felezőmerőlegesére, ezért *DAB* háromszög egyenlőszárú, tehát $DAB\angle = 30°$, így $ADB\angle = 120°$, $ADP\angle = 60°$. Mivel $ADE\angle = 60°$ ezért $ADC\angle = 120°$, $DAC\angle = 40°$. Észrevehető tehát, hogy AP és *DP* az *ADC* háromszög két belső szögének szögfelezője, vagyis *P* pont az *ADC* háromszög beírt körének középpontja. Tehát *CP* szakasz felezi az *ACD* szöget. Innen számítható:

$$BPC\angle = 180^0 - 10^0 - 60^0 = 110^0$$

5. Vegyünk fel n darab 0-tól különböző valós számot. Hányat válasszunk közülük negatívnak illetve pozitívnak, hogy képezve az összes páronkénti szorzataikat, a lehető legtöbb esetben kapjunk negatív eredményt.

__Megoldás__

Válasszunk *p* darab számot pozitívnak, és *n* – *p* darabot negatívnak. Azok a szorzatok lesznek negatívok, amelyekben egyik tényező negatív, a másik pozitív, így – a párbaállítást minden lehetőség szerint elvégezve – a negatív szorzatok száma:

$$p(n-p) = \left(\frac{n}{2}\right)^2 - \left(\frac{n}{2} - p\right)^2 = \left(\frac{n}{2}\right)^2 - \left(\frac{n-2p}{2}\right)^2$$

1. megoldás

Az első tag állandó, így a kifejezés értéke akkor a legnagyobb, ha a kivonandó a legkisebb. Páros n esetén p-t $\frac{n}{2}$ -nek választva, a kivonandó 0, vagyis akkor lesz a legtöbb negatív szorzat, ha a számok felét pozitívnak, felét negatívnak választjuk.

Páratlan n esetén az $n - 2p$ különbség abszolút értékének legkisebb értéke 1, ezt $p = \frac{n-1}{2}$ illetve $p = \frac{n+1}{2}$ esetén veszi fel. Eszerint ebben az esetben úgy kapunk legtöbb negatív szorzatot, ha a pozitívnak és negatívnak választott számok száma éppen 1-gyel tér el egymástól.

2. megoldás

Az $f(p) = -\left(p - \frac{n}{2}\right)^2 + \frac{n^2}{4}$ függvény felvázolásával maximum keresése, ha p pozitív egész szám.

6. Oldjuk meg a valós számok halmazán az $x^{10} - 10x + 9 = 0$ egyenletet!

Megoldás

Csak pozitív megoldása lehet az egyenlőségnek (hiszen $x = \frac{x^{10}+9}{10} > 0$).

Pozitív számokra a számtani és mértani közép közti egyenlőtlenség alapján:

$$\frac{x^{10} + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1}{10} \geq \sqrt[10]{x^{10} \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1}$$

$$\frac{x^{10} + 9}{10} \geq x$$

$$x^{10} - 10 + 9 \geq 0$$

Egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha $x = 1$, és ez az egyenlet egyetlen megoldása.

Megjegyzés

Abból, hogy az egyenlet együtthatóinak összege 0, csak annyi következik, hogy az 1 megoldás, de az nem, hogy ez az egyetlen megoldás.

11. évfolyam

1. Egy kis falu 32 házból áll. Reggelente a csordás kolompolására minden házból egy tehenet kihajtanak a rétre legelni, és estére mindegyik jóllakottan visszatér a saját házának istállójába. (A tehenek pontosan tudják hol laknak.) Egy este a csorda tagjai egymás után térnek haza, de az elsőnek érkező Riska most ötletszerűen megy be egy házba, és ott is marad. Ez után mindegyik érkező a saját istállójába megy, ha az nem foglalt. Ha pedig az foglalt, akkor véletlenszerűen választ egy olyan istállót, ahova még nem ment be tehén, és szintén ott marad. Mennyi annak a valószínűsége, hogy az utolsónak érkező Bimbó a saját házába megy?

Megoldás

Amikor Bimbó megérkezik, már csak egy házba mehet be, hiszen előtte már 31 ház istállóját elfoglalták. Az utolsónak érkező számára az egyetlen szabad ház csak a saját vagy Riska otthona lehet, ellenkező esetben a már hazaérkezett ott lakó elfoglalta volna.

Akár Riska vagy Bimbó istállója szabad, az természetesen végig szabad volt, akkor is, ha a másikat már elfoglalták. Például, ha egy tehén, akit hívjunk X-nek, bement Riska istállójába (mert ő Riska, vagy egy később érkező, akinek elfoglalták a helyét), ugyanakkora eséllyel mehetett volna be Bimbó istállójába, és ez nem befolyásolta volna a később érkező tehenek helyfoglalását, mert számukra mindegy, hogy a két istálló közül melyiket foglalták már el. Ugyanígy, ha X Bimbó helyére ment, ugyanakkora esélye volt Riska istállójába bemenni függetlenül az eddig érkező tehenektől, és nem befolyásolta volna a döntésével a később érkezőket. A két lehetőség valószínűsége egyenlő. Így Bimbó érkezéséig végig ugyanakkora volt annak az esélye, hogy Riska vagy Bimbó istállója foglalt, tehát 0,5 a valószínűsége annak, hogy Bimbó utolsóként érkezve a saját istállójába mehet be.

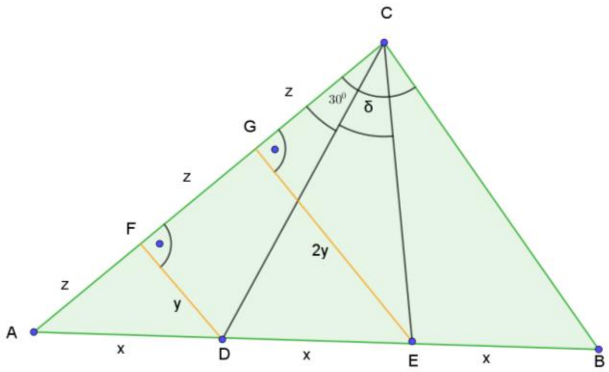
2. Az ABC derékszögű háromszög AB átfogójának harmadolópontjai D és E. (D az A csúcshoz van közelebb.) Mekkora részekre osztja CD és CE az ACB szöget, ha az ACD szög nagysága 30^0?

Megoldás

Állítsunk merőlegest D és E pontokból AC oldalra. Az ábra jelöléseit használva a párhuzamos szelőszakaszok tétele alapján FDC és GEC derékszögű háromszögekben:

$tg30^0 = \frac{y}{2z} \Rightarrow \frac{y}{2z} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

$tg(30^0 + \delta) = \frac{2y}{z} = 4\frac{y}{2z} = 4\frac{\sqrt{3}}{3} \quad \Rightarrow \quad 30^0 + \delta \approx 66{,}6^0 \quad \Rightarrow \quad \delta \approx 36{,}6^0$



A CD és CE szakaszok az ACB szöget 30^0; $36{,}6^0$; $23{,}4^0$ részekre osztja.

3. Az ABC C-ben derékszögű háromszög a, b és c oldaláról tudjuk, hogy

$$3c^2 - 5b^2 + 5ab = 0.$$

Határozza meg a háromszög hegyesszögeinek nagyságát!

Megoldás

Mivel az ABC háromszög C-ben derékszögű, ezért Pitagorasz tételét használva a megadott egyenletben c^2 helyére írjunk $a^2 + b^2$-et, így az alábbi összefüggést kapjuk:

$$3a^2 - 2b^2 + 5ab = 0$$

Mivel $b > 0$, ezért az egyenletet b^2-tel osztva, a $3\left(\frac{a}{b}\right)^2 + 5\frac{a}{b} - 2 = 0$

$\frac{a}{b}$-ben másodfokú egyenletet kapunk, melynek megoldásai -2 és $\frac{1}{3}$.

Mivel az ABC háromszögben $tg\alpha = \frac{a}{b}$ (ahol $0° < \alpha < 90°$, vagyis $tg\alpha = \frac{a}{b} > 0$), így az egyenlet megoldásai közül csak $\frac{1}{3}$ esetén létezik α hegyesszög, ami $\alpha \approx 18{,}43°$. Ekkor $\beta \approx 71{,}57°$.

4. 2023 db nemnegatív egész számról tudjuk, hogy bárhogyan is hagyunk el közülük egyet, a megmaradó 2022 szám két, egyenként 1011 elemű csoportra osztható úgy, hogy a csoportokban levő számok összege egyenlő. Bizonyítsuk be, hogy a 2023 db nemnegatív egész szám egyenlő.

Megoldás

Az adott 2023 nemnegatív egész számból álló halmaz legyen H.

A H halmaz elemeinek összegét jelölje S, a halmaz egy tetszőleges elemét pedig a. A feltételből következik, hogy az $S - a$ páros szám, és így az a ugyanazt a maradékot adja 2-vel osztva, mint az S. Ez pedig éppen azt jelenti, hogy a H minden eleme azonos paritású.

Legyen a H halmazban levő számok minimuma m. Ha a halmaz minden eleméből kivonjuk m-et, akkor olyan K halmazhoz jutunk, amelyben

-teljesül a feladat feltétele,

-az elemek minimuma 0,

-az elemek paritása azonos, tehát minden elem páros.

Ha belátjuk, hogy ennek a K halmaznak minden eleme 0, akkor készen vagyunk, hiszen ez esetben a H halmaz minden eleme m.

Indirekt úton gondolkodunk. Tegyük fel, hogy van olyan halmaz, amely megfelel a feladat feltételeinek, és van 0 eleme, valamint van 0-tól különböző pozitív páros eleme is. Tekintsük az összes ilyen halmazt, és ezek közül válasszunk ki egy olyat, amelyiknek a legkisebb pozitív eleme minimális. Mivel ennek a halmaznak is minden eleme 0 vagy pozitív páros szám, a halmaz elemeit kettővel osztva nemnegatív egészekből álló olyan halmazhoz jutunk, ami teljesíti a feladat feltételeit. Azonban az így létrehozott halmaz pozitív elemeinek minimuma fele a feltett minimum értéknek. Ez ellentmondás, tehát nincs ilyen halmaz, K minden eleme 0.

5. Oldjuk meg az alábbi egyenletet a valós számok halmazán!

$$[\sin x] + 2\{\cos x\} = 1$$

($[a]$ az a szám egészrészét, $\{a\}$ pedig a törtrészét jelenti.)

Megoldás

Mivel $-1 \leq sinx \leq 1$, ezért $[sinx]$ a -1, 0 vagy 1 értéket veheti fel.

Ha $[sinx]$ = -1, akkor az eredeti egyenletből $\{\cos x\}$ = 1, ami lehetetlen.

Ha $[sinx]$ = 1, akkor $sinx = 1$, ahonnan $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$, ami megoldás, mivel ezen x-ekre cos x = 0, s ekkor $\{\cos x\}$ = 0, így 1 + 0 = 1-et kapunk, ami igaz.

Ha $[sinx]$ = 0, akkor $0 \leq sinx < 1$, azaz $2l\pi \leq x < \frac{\pi}{2} + 2l\pi$ $(l \in \mathbb{Z})$. Az eredeti egyenletbe helyettesítve ekkor $2\{\cos x\} = 1$ ahonnan $cosx = \frac{1}{2}$. Innen, mivel x első síknegyedbeli szöget jelöl, csak az $x = \frac{\pi}{3} + 2m\pi$ $(m \in \mathbb{Z})$ ad helyes megoldást.

Az egyenlet megoldása tehát: $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$, illetve $x = \frac{\pi}{3} + 2m\pi$ $(m \in \mathbb{Z})$.

6. Van-e megoldása a pozitív egész számokból álló rendezett számhármasok halmazán a következő egyenletnek?

$$15x^2 - 4y^2 = 3^z$$

Megoldás

Mivel az egyenlet jobb oldalának értéke páratlan egész. s $4y^2$ biztosan páros, ezért x páratlan pozitív egész.

Ha z páros, akkor vizsgáljuk mindkét oldal 4-gyel való osztási maradékát:

$3^z = 3^{2k} = 9^k$ -ből az egyenlet jobb oldala 4-gyel osztva 1 maradékot ad.

Mivel egy páratlan szám négyzete 4-gyel osztva 1 maradékot ad, így $15x^2$osztási maradéka -1, vagyis $15x^2 - 4y^2$ 4-gyel való osztási maradéka is -1, ami ellentmondás.

Ha z páratlan, akkor vizsgáljuk mindkét oldal 5-tel való osztási maradékát:

$3^z = 3^{2k+1} = 3 \cdot 9^k$-ből az egyenlet jobb oldalát 5-tel osztva ± 3 lehet az osztási maradék.

Páros szám négyzete 5-tel osztva ± 1 maradékot adhat.

A bal oldal $15x^2 - 4y^2 = 15x^2 - (2y)^2$, vagyis ezen oldal 5-tel való osztási maradéka ± 1, ami ellentmondás.

A pozitív egész számok halmazán tehát nincs megoldása az egyenletnek.

12. évfolyam

1. Határozzuk meg a p valós paraméter értékét, ha tudjuk, hogy a

$$p\cdot\sqrt{x^2}+\frac{1}{2}\cdot\sqrt[4]{x^2}-\frac{1}{3}=0$$

egyenletnek pontosan két különböző valós gyöke van.

Megoldás: Legyen $y=\sqrt[4]{x^2}$ $(y\geq 0)$. Az eredeti egyenletnek pontosan akkor van két különböző valós megoldása, ha a

$$py^2+\frac{1}{2}y-\frac{1}{3}=0$$

egyenletnek pontosan egy pozitív megoldása van.

Ha $p=0$, akkor $y=\frac{2}{3}$, ami pontosan két különböző valós gyököt szolgáltat az eredeti egyenletre nézve.

Ha $p>0$, akkor a gyökök és együtthatók közötti összefüggések alapján y-ra pontosan egy pozitív érték adódik, tehát ekkor is két különböző valós gyöke lesz az eredeti egyenletnek.

A $p<0$ esetben y-ra akkor kaphatunk egyetlen pozitív értéket, ha a diszkrimináns 0, azaz

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2+\frac{4p}{3}=0,$$

ahonnan $p=-\frac{3}{16}$.

Összefoglalva: Az eredeti egyenletnek akkor van pontosan két különböző valós gyöke, ha $p\geq 0$ vagy $p=-\frac{3}{16}$.

2. Jelölje S_n az $\{a_n\}$ számtani sorozat első n tagjának összegét. Tudjuk, hogy $S_6=S_9$. Határozzuk meg a_3 és a_5 arányát.

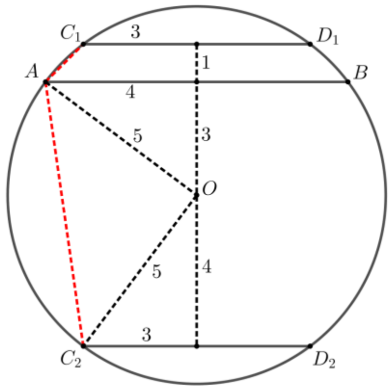
Megoldás: Jelölje a a sorozat első tagját, d pedig a differenciáját. Az $S_6=S_9$ feltétel a megfelelő összegképletet alkalmazva:

$$3(2a+5d)=\frac{9}{2}(2a+8d),$$

ahonnan $a=-7d$. Ezzel $a_3=-5d$, $a_5=-3d$, és így $a_3:a_5=5:3$.

3. Egy 5 cm sugarú kör két párhuzamos húrja AB és CD. Milyen hosszú az AC húr, ha $AB=8$ cm, $CD=6$ cm?

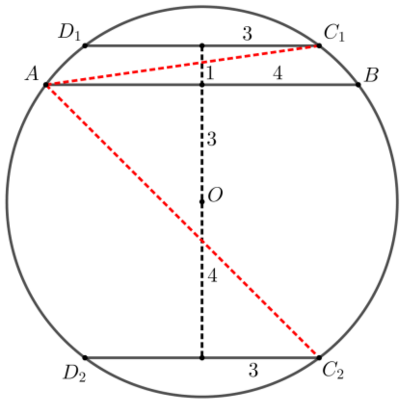
Megoldás: Mivel a feladat a húrok elhelyezkedéséről és betűzéséről nem mond semmi szűkítő feltételt, ezért négy esetet kell vizsgálnunk. Az első két eset az alább *1. ábrán* látható.



1. ábra

Pitagorasz tételét alkalmazva a feltételek alapján könnyen adódik, hogy $AC_1 = \sqrt{2}$, $AC_2 = 5\sqrt{2}$.

A *2. ábra* a fordított betűzésű elhelyezkedést mutatja.



2. ábra

Hasonlóan az előző két esethez, a megfelelő derékszögű háromszögekre Pitagorasz tételét alkalmazva kapjuk, hogy $AC_1 = 5\sqrt{2}$, $AC_2 = 7\sqrt{2}$.

4. Van-e olyan, a tízes számrendszerben felírt háromjegyű $\overline{abc}$ szám, amelyre teljesül, hogy az $\overline{abc} + \overline{bca} + \overline{cab}$ összeg egy pozitív egész szám négyzete? A választ indokolni kell!

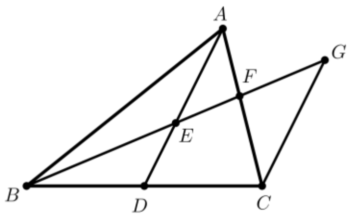
Megoldás: Helyiértékes bontásban felírva a vizsgálandó összeget:

$$\overline{abc} + \overline{bca} + \overline{cab} = 111 \cdot (a+b+c) = 3 \cdot 37 \cdot (a+b+c).$$

Ha $\overline{abc} + \overline{bca} + \overline{cab}$ négyzetszám lenne, akkor minden prímosztója páros hatványkitevőn szerepelne a szám prímtényezős felbontásában. Mivel 37 prím, ezért szükséges feltétel, hogy 37 osztója legyen $a+b+c$-nek. Viszont ez nem teljesülhet, ugyanis $a+b+c \le 27 < 37$. Tehát nincs megfelelő $\overline{abc}$ szám.

5. Az ABC háromszög BC oldalának felezőpontja D. E az AD súlyvonalnak olyan pontja, amelyre $BE = AC$. A BE egyenes az AC oldalt F-ben metszi. Igazoljuk, hogy $AF = EF$.

Megoldás: C-n keresztül húzzunk párhuzamost az AD egyenessel. Ennek a párhuzamosnak és a BE egyenesnek a metszéspontja legyen G az ábrának megfelelően.



Az AEG és CGF háromszögek hasonlók, ugyanis megfelelő szögeik páronként megegyeznek. Ebből következik, hogy

$$\frac{AF}{EF}=\frac{FC}{FG}=\frac{AF+FC}{EF+FG}=\frac{AC}{EG}=\frac{BE}{EG}.$$

A BCG háromszögben D a BC oldal felezőpontja, és DE párhuzamos CG-vel, amiből adódóan DE középvonal. Ebből pedig következik, hogy E felezi a BG szakaszt, azaz $BE=EG$. Ez pedig az előzőek alapján a feladat állítását bizonyítja.

6. *a*) Van-e az 1; 2; 3; …; 9 számoknak olyan $a_1;\ a_2;\ a_3;\ ...;\ a_9$ permutációja (sorrendje), amelyre teljesül, hogy az $|a_1-1|;\ |a_2-2|;\ |a_3-3|;\ ...;\ |a_9-9|$ számok páronként különbözők?
b) Van-e az 1; 2; 3; …; 9; 10 számoknak olyan $a_1;\ a_2;\ a_3;\ ...;\ a_9;\ a_{10}$ permutációja, amelyre teljesül, hogy az $|a_1-1|;\ |a_2-2|;\ |a_3-3|;\ ...;\ |a_9-9|;\ |a_{10}-10|$ számok páronként különbözők? A választ mindkét esetben indokolni kell!

Megoldás:
a) Van megfelelő permutáció, például 9; 5; 7; 4; 6; 8; 1; 3; 2.
b) Ebben az esetben nincs megfelelő permutáció. A bizonyítást indirekt végezzük.
Tegyük fel, hogy $a_1;\ a_2;\ a_3;\ ...;\ a_9;\ a_{10}$ egy megfelelő permutáció. Ekkor a tekintett különbségek összege, $0+1+2+3+...+8+9=45$ páratlan szám.
Másrészt, mivel egy egész szám paritása megegyezik abszolútértékének paritásával, ezért az

$$|a_1-1|+|a_2-2|+...+|a_{10}-10|$$

és

$$(a_1-1)+(a_2-2)+...+(a_{10}-10)$$

összegek paritása meg kell, hogy egyezzen. Az első összeg 45, a második összeg 0, ami azt jelenti, hogy ellentmondásra jutottunk, nincs megfelelő permutáció.